

Matemáticas I

6-Setiembre-07

1. Demuestra, por inducción, que si $n \geq 1$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución:

Si $n = 1$, ambos miembros dan 1.

Supongamos cierta la igualdad para $n = k$ y probémosla para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1) + 1]}{6} \end{aligned}$$

2. En el conjunto $P(\{a, \dots, z\})$, formado por los subconjuntos de letras del alfabeto, ordenado por inclusión se considera el subconjunto $\mathcal{S} = \{M, N, R, Q\}$ donde

$$M = \{a, b, c\} \quad N = \{b, c\} \quad R = \{b, d, e\} \quad Q = \{a, b, c, d, e\}$$

Describe, si existen, maximales, máximo, mínimo, minimales, una cota inferior (3 puntos).

Solución: Q es máximo y maximal de $\mathcal{S}$, pues contiene a todos los *elementos* de $\mathcal{S}$.

Por otro lado, N y R son minimales, pues no contienen a ninguno de $\mathcal{S}$.

Una cota inferior es $\{b\}$, pues está incluido en los cuatro *elementos* de $\mathcal{S}$. Asimismo el $\emptyset$ es otra cota inferior. Puede elegir el examinando una de ellas.

3. Describe en el lenguaje que estimes oportuno un procedimiento que admita como entrada dos polinomios f y $g \neq 0$ y que calcule el único par (q, r) cumpliendo

$$f = gq + r \quad r = 0 \quad \text{grado}(r) < \text{grado}(g)$$

Aplícalo al par $f = x^2 - 3$, $g = x^7 + 5$ (8 puntos)

Solución: Puede tomarse como modelo el procedimiento de la página 52 del libro de texto.

En particular, para $f = x^2 - 3$, $g = x^7 + 5$, se tiene directamente $q = 0$ y $r = x^2 - 3$.

4. Resuelve el sistema de congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases} \quad (5 \text{ puntos})$$

Solución:

Tomando las dos primeras congruencias

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

buscamos $x = 1 + 3h$ cumpliendo la segunda, es decir

$$1 + 3h \equiv 5 \pmod{7}$$

Operando,

$$3h \equiv 4 \pmod{7}$$

Procedemos a calcular el inverso de $3 \pmod{7}$; al efecto, el algoritmo extendido de Euclides da

$$-2 \cdot 3 + 1 \cdot 7 = 1$$

Por tanto,

$$h \equiv -2 \cdot 4 \pmod{7} \iff h \equiv -1 \pmod{7}$$

Así, $x = 1 + 3h = 1 - 3 = -2$.

Pasamos a resolver

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{21} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

El método es siempre el mismo: Por la primera congruencia buscamos

$$x = -2 + 21h$$

cumpliendo la segunda, es decir

$$-2 + 21h \equiv 3 \pmod{5}$$

Operando,

$$21h \equiv 5 \pmod{5} \iff 21h \equiv 0 \pmod{5}$$

para calcular el nuevo h buscamos el inverso de $21 \pmod{5}$. El algoritmo extendido de Euclides da

$$1 \cdot 21 + (-4) \cdot 5 = 1$$

es decir, el inverso modular es 1. Multiplicando por tal inverso

$$h \equiv 0 \pmod{5}$$

Finalmente, tomando $h = 0$

$$x = -2 + 21.0 = -2$$

lo que podíamos haber previsto. La solución general es

$$\{-2 + 105z \mid z \in \mathbf{Z}\}$$

5. Describe en el lenguaje que estimes oportuno un procedimiento que tome como entrada una matriz A de m filas y una matriz columna B de m filas, dando como salida el conjunto de soluciones del sistema $AX = B$. Aplícalo a las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 14 & 8 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (10 \text{ puntos})$$

Solución: Puede tomarse como modelo el procedimiento y ejemplo de las páginas 86, 87 y 88 del libro de texto, lo que nos da el procedimiento y una solución particular

$$S = (-9, 0, 3, 0, 0)$$

del sistema. Falta calcular el núcleo de A .

Al efecto, aplicando el procedimiento de la página 86 del libro de texto, trasponemos la matriz obteniendo

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 6 & 14 & 8 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

A continuación, orlamos con la matriz identidad

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 14 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Escalonando, llegamos a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

por lo que el núcleo es el subespacio generado por las filas de

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución es

$$(-9, 0, 3, 0, 0) + < (-2, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, 0, 1, 0), (8, 0, -3, 0, 1) >$$

6. ¿Toda matriz cuadrada es semejante a una matriz diagonal? Si tu contestación es sí, demuéstrela; en caso contrario, pon un (contra)ejemplo (2 puntos).

Solución: No, sirviendo como (contra)ejemplo el 1. de la página 97 del libro de texto.

7. En el plano euclídeo $\mathbf{R}^2$ se consideran las simetrías¹ axiales σ_1 y σ_2 de bases las rectas

$$x = 0 \quad y = 1$$

se pide

- (a) Ecuación de σ_1 (1 punto)
- (b) Ecuación de σ_2 (2.5 puntos)
- (c) Ecuación de $g = \sigma_2 \circ \sigma_1$ (1 punto)
- (d) Probar que g es un movimiento (1 punto)
- (e) Elementos notables de g (2 puntos)
- (f) Ecuación implícita de la recta imagen, por g , de

$$x = y \quad (2.5 \text{ puntos})$$

Solución:

- (a) **Ecuación de σ_1 :**

El origen queda fijo, por pertenecer a la base. La ecuación es $Y = AX$, donde A se calcula, por ejemplo, mediante las imágenes de los puntos fundamentales, siendo éstas prácticamente obvias:

$$\sigma_1(1, 0) = (-1, 0) \quad \sigma_1(0, 1) = (0, 1)$$

Por tanto, la ecuación es $Y = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) **Ecuación de σ_2 :**

La imagen del origen es $(0, 2)$ y la matriz B se calcula cómodamente a partir de

$$\sigma_2(1, 0) = (1, 2) \quad \sigma_2(0, 1) = (0, 1)$$

Entonces,

$$B^1 = (1, 2)^t - (0, 2)^t = (1, 0)^t \quad B^2 = (0, 1)^t - (0, 2)^t = (0, -1)^t$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación es $Y = (0, 2)^t + BX$.

¹ortogonales

- (c) **Ecuación de $g = \sigma_2 \circ \sigma_1$:**

La transformación es

$$X \mapsto AX \mapsto (0, 2)^t + B(AX) = (0, 2)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

Es decir, la ecuación es

$$Y = (0, 2)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

- (d) Denominando C a la matriz de la ecuación, $C^t C = I$ y es un movimiento.
 (e) Para ver los elementos notables del movimiento calculamos los rangos; poniendo $c = (0, 2)^t$:

$$\text{rang}(I - C) = 2 = \text{rang}(I - C|c)$$

En estas condiciones, se trata de un giro. Para calcular el centro, planteamos

$$(I - C)X = c \implies x = 0 \quad y = 1$$

exactamente, el punto de corte de los dos ejes².

Finalmente, el ángulo de giro se obtiene de

$$\cos \alpha = -1 \implies \alpha = \pi$$

exactamente, el doble del ángulo que forman los dos ejes³.

- (f) La imagen de una recta por un movimiento es una recta así que tomamos dos puntos $P(0, 0)$, $Q(1, 1)$ en la recta dada y calculamos sus imágenes

$$g(P) = (0, 2)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (0, 0)^t = (0, 2)^t$$

$$g(Q) = (0, 2)^t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (1, 1)^t = (-1, 1)$$

Por tanto, la ecuación de la recta imagen se deduce de

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x & y - 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Es decir,

$$x - y + 2 = 0$$

²Como debe ser

³No faltaría más. Asimismo es válida la contestación: *simetría central de base el punto (0, 1)*